

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация.

Актуальность и цели. Задача об определении неизвестного граничного условия часто возникает в различных областях физики и техники в тех случаях, когда непосредственное измерение характеристик поля на части границы затруднено, либо же вовсе невозможно. Примеры задач такого типа можно встретить, в частности, в геофизике, ядерной физике, в обратных задачах теплообмена и т.д. Их сложность в значительной степени обусловлена их некорректностью, т.е. неустойчивостью их решения к возмущениям исходных данных. Учет этого свойства при решении обратных задач приводит к необходимости в разработке специальных методов регуляризации. Несмотря на многочисленные работы, выполненные в данном направлении, до настоящего момента не теряет актуальности проблема разработки новых численных методов решения граничных обратных задач математической физики.

Материалы и методы. Рассматривается начально-краевая задача для одномерного уравнения теплопроводности. Ставится задача о приближенном восстановлении неизвестного граничного условия на одном из концов интервала изменения пространственной переменной в предположении о том, что известными являются функции, определяющие начальное условие, а также граничное условие на другом конце интервала изменения пространственной переменной. В качестве дополнительной информации используются функционалы от решения исходной начально-краевой задачи при некотором фиксированном значении пространственной переменной. При конструировании численного алгоритма решения поставленной задачи (в интегральном представлении) используется подход, основанный на аппроксимации по коллокационной технологии полученного интегрального уравнения и реализации вычислительной схемы итерационным процессом, построенным на базе непрерывного операторного метода решения уравнений в банаховых пространствах. В числе достоинств метода следует назвать в первую очередь его простоту, а также универсальность и устойчивость к возмущениям исходных данных.

Результаты. Построены численные методы решения обратной граничной задачи для одномерного линейного параболического уравнения. Рассмотрены первая и вторая краевые задачи. Эффективность предложенных методов проиллюстрирована решением ряда модельных примеров.

Выводы. Подход к решению прямых и обратных задач математической физики, основанный на применении непрерывного операторного метода решения уравнений в банаховых пространствах, оказался эффективен при решении граничной обратной задачи для линейного одномерного уравнения теплопроводности. Весьма перспективным видится дальнейшее развитие этого подхода для применения его к решению задачи одновременного восстановления

нескольких граничных условий, а также к решению обратных граничных задач для многомерных уравнений.

Ключевые слова: параболическое уравнение, граничная обратная задача, непрерывный операторный метод, логарифмическая норма, регуляризация.

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

ON THE METHOD FOR RECONSTRUCTING THE BOUNDARY CONDITION FOR PARABOLIC LINEAR EQUATIONS

Abstract.

Background. A problem of determination of unknown boundary condition often appears in different fields of physics and technical sciences in cases when direct measuring of field characteristics at some part of the boundary is difficult or even impossible. Examples of such problems can be found in applications of geophysics, nuclear physics, inverse heat transfer problems etc. Their complexity is mainly due to their ill-posedness, i. e. instability of solutions to different perturbations of initial data. Taking into account this feature while solving such problems leads to necessity for development of special regularization methods. In spite of a lot of results obtained in this direction, until present moment the problem of development of new methods for solution of inverse boundary problems of mathematical physics appears relevant.

Materials and methods. An initial boundary value problem for one-dimensional heat equation is considered in the paper. We consider the problem of approximate recovery of a boundary condition at one end of the interval range on changing in spatial variable while functions determining initial condition and also another boundary condition are assumed to be known. As an additional information about we use functionals of the solution of basic initial boundary value problem at some fixed value of the spatial variable. In order to construct the numerical algorithm for solving the problem we use the approach based on integral representation of the basic problem, approximation of the obtained integral equation by collocation technique and realization of the computational scheme by means of the iteration process that is constructed using continuous operator method for solving equations in Banach spaces. The advantages of the method include its simplicity together with its universality and stability of perturbations of the initial data.

Results. Numerical methods for solving the boundary value problem for one-dimensional linear parabolic equation have been constructed. The boundary value problems of first and second type have been considered. Efficiency of the proposed methods is illustrated with several model examples.

Conclusions. The approach to solving direct and inverse problems of mathematical physics based on application of continuous operator method for solving equations in Banach spaces has been proved to be effective for solving boundary value problem for linear one-dimensional heat equation. Further development of this approach for its application to the problem of simultaneous recovery of several boundary conditions and also to the inverse boundary value problem for multidimensional equations seems to be promising.

Keywords: parabolic equation, boundary value problem, continuous operator method, logarithmic norm, regularization.

Введение

Аналитическим и численным методам решения обратных задач математической физики, в том числе начально-краевых задач для параболических

уравнений, посвящена обширная литература. Особый интерес исследователей, занимающихся разработкой численных методов решения обратных и некорректных задач для параболических уравнений, вызывают градиентные методы [1], в частности, метод наискорейшего спуска [2]. Среди важных работ, посвященных анализу и решению задач о восстановлении граничных условий для уравнений параболического типа, следует назвать работы [3–11]. Тем не менее до настоящего времени существует большая потребность в разработке эффективных численных методов решения граничной обратной задачи для уравнений теплопроводности.

В данной работе в качестве такого метода предлагается непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений.

Следуя работе [12], коротко опишем этот метод.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in B$, а Φ – оператор, отображающий банахово пространство B в себя.

Поставим уравнению (1) в соответствие задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(\sigma)}{d\sigma} = \Phi(\bar{\mathbf{x}}(\sigma)) - \mathbf{y}, \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\chi}, \quad (3)$$

где $\sigma \geq 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [12]. Предположим, что уравнение (1) имеет решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, причем на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(0, r)$ радиуса r , справедливы следующие условия:

1) при всяком $\sigma > 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\sigma} \Lambda(\Phi'(\varphi(s))) ds \leq 0;$$

2) выполняется неравенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int_0^{\sigma} \Lambda(\Phi'(\varphi(s))) ds \leq -\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) сходится к решению \mathbf{x}^* уравнения (1).

Здесь через Φ' обозначена производная Фреше оператора Φ . Через $\Lambda(\Phi')$ обозначается логарифмическая норма оператора Φ' , определяемая формулой

$$\Lambda(\Phi') = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|\mathbf{I} - h\Phi'\| - 1}{h},$$

где \mathbf{I} – тождественный оператор, а символ \downarrow означает стремление к нулю, убывая.

1. Постановка задачи

В данной работе рассматривается обобщенная начально-краевая задача для линейного одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t \leq T \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (5)$$

$$\Lambda(u; x=0) = \psi_1(t), \quad \Lambda(u; x=\ell) = \psi_2(t), \quad (6)$$

где $\gamma > 0$, а Λ – оператор, фиксирующий конкретный тип граничного условия рассматриваемой задачи:

– первая краевая задача: $\Lambda(u; x=a) = u(t, a)$;

– вторая краевая задача: $\Lambda(u; x=a) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}$.

Дополнительно предполагается, что известной при $0 \leq t \leq T$ является функция $\alpha(t) = u(t, x^*)$, где $x^* \in (0, \ell)$ – некоторое фиксированное значение.

В этих условиях ставятся следующие задачи:

- 1) восстановление $\psi_1(t)$ при известной функции $\psi_2(t)$;
- 2) восстановление $\psi_2(t)$ при известной функции $\psi_1(t)$.

В следующем разделе подробно описывается алгоритм решения первой задачи. Вторая задача решается аналогично, и построение соответствующего алгоритма проводится очевидным образом.

2. Общее описание алгоритма

Общее решение начально-краевой задачи (4)–(6) определяется интегральной формулой [13]

$$u(t, x) = \beta(\varphi, \psi_2; t, x) + \gamma \int_0^t H_1(x, t-s) \psi_1(s) ds, \quad (7)$$

где $\beta(\varphi, \psi_2; t, x)$ и $H_1(t, x)$ определяются способом задания оператора Λ :

– в случае первой краевой задачи:

$$\beta(\varphi, \psi_2; t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - \gamma \cdot \int_0^t H_2(x, t-s) \psi_2(s) ds,$$

$$H_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=0}, \quad H_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t) \Big|_{\xi=\ell};$$

где

$$G(x, \xi, t) = G_1(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{k\pi \xi}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{\gamma k^2 \pi^2 t}{\ell^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2k\ell)^2}{4\gamma t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2k\ell)^2}{4\gamma t}\right] \right\}; \quad (8)$$

– в случае второй краевой задачи:

$$\beta(\varphi, \psi_2; t, x) = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \gamma \int_0^t \psi_2(s) G(x, \ell, t-s) ds,$$

$$H_1(x, t) = -\gamma \cdot G(x, 0, t),$$

где

$$G(x, \xi, t) = G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{\ell} + \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{k\pi \xi}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{\gamma k^2 \pi^2 t}{\ell^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2k\ell)^2}{4\gamma t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi+2k\ell)^2}{4\gamma t}\right] \right\}. \quad (9)$$

Зафиксируем в уравнении (7) $x = x^*$ и запишем его в следующем виде:

$$\beta(\varphi, \psi_2; t, x^*) + \gamma \int_0^t H_1(x^*, t-s) \psi_1(s) ds - \alpha(t) = 0. \quad (10)$$

Введем на интервале $t \in [0, T]$ равномерную сетку из узлов $t_i = i\tau$, $i = \overline{0, M}$, с шагом $\tau = T/M$, где M – достаточно большое целое положительное число. Тогда интервал $t \in [0, T]$ разобьется на интервалы

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{M-2}, t_{M-1}], [t_{M-1}, t_M].$$

Рассмотрим вопрос о подходящем способе аппроксимации интеграла:

$$\int_0^{t_i} H_1(x^*, t_i - s) \psi_1(s) ds.$$

Запишем этот интеграл в виде суммы:

$$\int_0^{t_i} H_1(x^*, t_i - s) \psi_1(s) ds = \sum_{m=0}^{i-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) \psi_1(s) ds.$$

Согласно обобщенной теореме о среднем в интервале $[t_m, t_{m+1}]$ найдется такая точка $\tilde{s}_{i,m}$, что

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) \Psi_1(s) ds = \Psi_1(\tilde{s}_{i,m}) \left(\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) ds \right). \quad (11)$$

Предположив, что шаг разбиения τ достаточно мал, примем

$$\tilde{s}_{i,m} = t_{m+1/2} = t_m + \tau/2, \quad m = \overline{0, i-1}, i = \overline{1, M}.$$

Тогда формула (11) заменится приближенной формулой:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) \Psi_1(s) ds \approx \Psi_1(t_{i+1/2}) \left(\int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) ds \right) = \Psi_1(t_{m+1/2}) \mu_{i,m},$$

$$\mu_{i,m} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} H_1(x^*, t_i - s) ds. \quad (12)$$

Покажем, что интеграл $\mu_{i,m}$ может быть во всех случаях вычислен аналитически.

Пусть сначала рассматривается первая краевая задача. Имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{i,m} &= \frac{2\pi}{\ell^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{t_m}^{t_{m+1}} \exp\left(-\frac{\gamma k^2 \pi^2 (t_i - s)}{\ell^2}\right) ds \right) \cdot k \sin\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right) = \\ &= \frac{2}{\gamma\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{\gamma k^2 \pi^2 (t_i - s)}{\ell^2}\right) \Big|_{s=t_m}^{s=t_{m+1}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right)}{k} = \\ &= \frac{2}{\gamma\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\frac{\gamma k^2 \pi^2 (i-m-1)\tau}{\ell^2}} - e^{\frac{\gamma k^2 \pi^2 (i-m)\tau}{\ell^2}} \right\} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right)}{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь рассмотрим вторую краевую задачу. В этом случае:

$$\begin{aligned} \mu_{i,m} &= -\frac{1}{\ell} \left[\int_{t_m}^{t_{m+1}} ds + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right) \cdot \int_{t_m}^{t_{m+1}} \exp\left(-\frac{\gamma k^2 \pi^2 (t_i - s)}{\ell^2}\right) ds \right] = \\ &= -\frac{1}{\ell} \left[\tau + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right) \cdot \frac{\ell^2}{\gamma k^2 \pi^2} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma k^2 \pi^2 (t_i - s)}{\ell^2}\right) \Big|_{t_m}^{t_{m+1}} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\tau}{\ell} - \frac{2\ell}{\gamma\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{k\pi x^*}{\ell}\right)}{k^2} \cdot \left[e^{-\frac{\gamma k^2 \pi^2 \tau(i-m-1)}{\ell^2}} - e^{-\frac{\gamma k^2 \pi^2 \tau(i-m)}{\ell^2}} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, при $t = t_i$ интеграл в левой части уравнения (10) аппроксимируется следующим образом:

$$\int_0^{t_i} H_1(x^*, t_i - s) \psi_1(s) ds \approx \sum_{m=0}^{i-1} \psi_1(t_{m+1/2}) \mu_{i,m}. \quad (15)$$

Приняв $t = t_i$ и подставив аппроксимацию (15) в уравнение (10), получаем

$$\beta_i + \gamma \sum_{m=0}^{i-1} \psi_1(t_{m+1/2}) \mu_{i,m} - \alpha_i = 0, \quad (16)$$

где $\beta_i = \beta(\varphi, \psi_2; t_i, x)$, $\alpha_i = \alpha(t)$.

Уравнение (16) служит основой для построения численных методов восстановления функции $\psi_1(t)$.

Для построения численного метода восстановления функции $\psi_1(t)$ воспользуемся непрерывным операторным методом. Введем в рассмотрение вспомогательные функции $\bar{\psi}_{1,j}(\sigma)$ ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{2M-1}{2}$) такие, что $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\psi}_{1,j}(\sigma) = \psi_1(t_j)$. В соответствии с описанием непрерывного операторного метода функции $\bar{\psi}_{1,j}(\sigma)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{\psi}_{1,\frac{1}{2}}}{d\sigma} = v_1 \left\{ \beta_1 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \bar{\psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma) \mu_{1,0} - \alpha_1 \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_{1,\frac{3}{2}}}{d\sigma} = v_2 \left\{ (\beta_2 - \beta_1) + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \bar{\psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma) \mu_{2,1} - (\alpha_2 - \alpha_1) \right\}, \quad (18)$$

.....

$$\frac{d\bar{\psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}}{d\sigma} = v_M \left\{ \left(\beta_M - \sum_{k=1}^{M-1} \beta_k \right) + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \bar{\psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(\sigma) \mu_{1,M-1} - \left(\alpha_M - \sum_{k=1}^M \alpha_k \right) \right\}, \quad (19)$$

здесь $v_j = \pm 1$ ($j = \overline{1, M}$) – константы, фиксируемые таким образом, чтобы логарифмическая норма матрицы в правой части рассматриваемой системы дифференциальных уравнений была отрицательной.

Для обеспечения единственности решения системы дифференциальных уравнений (17)–(19) необходимо присоединить к ней совокупность началь-

ных условий. С вычислительной точки зрения целесообразно зафиксировать начальные условия при помощи формулы

$$\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(0) = \dots = \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(0) = \Psi_1(0). \tag{20}$$

Для решения задачи (17)–(20) применим широкий спектр численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, легко видеть, что при непосредственном решении системы (17)–(20) процесс решения распадается на M последовательных этапов, на каждом из которых приближенно решается одно из уравнений системы. Однако в связи с влиянием ошибок при аппроксимации интегралов, а также погрешностей в исходных данных задачи такой подход представляется нецелесообразным, поскольку он приводит к значительным отклонениям от решения. Поэтому ниже предложен альтернативный подход к решению задачи (17)–(20), позволяющий уменьшить влияние погрешностей на решение.

Преобразуем систему (17)–(19) следующим образом:

$$\frac{d\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}}{d\sigma} = v_1 \left\{ \beta_1 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma) - \alpha_1 \right\}, \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}}{d\sigma} + \frac{d\bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}}{d\sigma} = v_2 \left\{ \beta_2 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \left[\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma) + \bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma) \right] - \alpha_2 \right\}, \tag{22}$$

.....

$$\sum_{k=1}^M \frac{d\bar{\Psi}_{1,\frac{2k-1}{2}}}{d\sigma} = v_M \left\{ \beta_M + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \left(\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma) + \bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma) + \dots + \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(\sigma) \right) - \alpha_M \right\}. \tag{23}$$

Решение системы (21)–(23) осуществляется методом Эйлера. Пусть θ – шаг метода Эйлера, а L – число итераций метода Эйлера. Тогда одна итерация метода заключается в последовательном счете по следующим формулам:

$$\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(1)}) = \bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(0)}) + v_1 \cdot \theta \cdot \left\{ \beta_1 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(0)}) - \alpha_1 \right\}, \tag{24}$$

$$\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(2)}) = \bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(1)}) + \theta \cdot v_2 \cdot \left\{ \beta_2 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \left[\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(1)}) + \bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma_r^{(0)}) \right] - \alpha_2 \right\}, \tag{25}$$

$$\bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma_r^{(1)}) = \bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma_r^{(0)}) + \theta \cdot v_2 \cdot \left\{ \beta_2 + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \left[\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(2)}) + \bar{\Psi}_{1,\frac{3}{2}}(\sigma_r^{(0)}) \right] - \alpha_2 \right\}, \tag{26}$$

.....

$$\begin{aligned} & \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(\sigma_r^{(1)}) = \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(\sigma_r^{(0)}) + \\ & + v_M \cdot \theta \cdot \left\{ \beta_M + \frac{\gamma\tau}{2} \cdot \left(\bar{\Psi}_{1,\frac{1}{2}}(\sigma_r^{(M)}) + \dots + \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-3}{2}}(\sigma_r^{(2)}) + \bar{\Psi}_{1,\frac{2M-1}{2}}(\sigma) \right) - \alpha_M \right\}, \tag{27} \end{aligned}$$

здесь $\sigma_r = \sigma_r^{(0)}$. Набор значений, найденных на текущей итерации, фиксируется в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{1, \frac{1}{2}}(\sigma_{r+1}) &= \bar{\Psi}_{1, \frac{1}{2}}(\sigma_r^{(M)}), \bar{\Psi}_{1, \frac{3}{2}}(\sigma_{r+1}) = \bar{\Psi}_{1, \frac{3}{2}}(\sigma_r^{(M-1)}), \dots, \\ \bar{\Psi}_{1, \frac{2M-3}{2}}(\sigma_{r+1}) &= \bar{\Psi}_{1, \frac{2M-3}{2}}(\sigma_r^{(2)}), \bar{\Psi}_{1, \frac{2M-1}{2}}(\sigma_{r+1}) = \bar{\Psi}_{1, \frac{2M-1}{2}}(\sigma_r^{(1)}). \end{aligned} \quad (28)$$

Результат работы алгоритма определяется формулами

$$\Psi_1(t_{1/2}) \approx \bar{\Psi}_{1, 1/2}(\sigma_L), \dots, \Psi_1(t_{(2M-1)/2}) \approx \bar{\Psi}_{1, (2M-1)/2}(\sigma_L). \quad (29)$$

Замечание 1. Заметим, что вышеописанный подход допускает обобщение на другие типы краевых задач, а также на краевые задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(t, x).$$

Замечание 2. Поскольку в реальных задачах исходные данные, как правило, являются известными не точно, а с некоторыми погрешностями, то на практике часто приходится выполнять ряд действий, направленных на уменьшение влияния погрешностей входных данных на решение задачи. В число таковых действий входят, в частности, предварительная обработка входных данных для фильтрации упомянутых погрешностей, а также постобработка решения, например, при помощи метода наименьших квадратов.

3. Решение модельных примеров

Модельный пример 1. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1), в которой $0 \leq x \leq 1$ и $\gamma = 1$. Известны функции

$$\varphi(x) = e^{-x} \cos(x), \quad \Psi_2(t) = e^{-1} \cos(1 - 2t), \quad u\left(t, \frac{1}{4}\right) = e^{-1/4} \cos\left(\frac{1}{4} - 2t\right).$$

Поставим задачу о восстановлении функции $\Psi_1(t)$ при $0 \leq t \leq 1$.

Замечание 3. Точное решение поставленной задачи определяется формулой $\Psi_1(t) = \cos(2t)$ при точном решении задачи (1)–(3), равном

$$u(t, x) = e^{-x} \cos(x - 2t).$$

При численных расчетах были зафиксированы следующие параметры метода: $\tau = 0,01$, $L = 100$, $\theta = 0,01$. Все значения $\bar{\Psi}_{1, 1/2}(0), \dots, \bar{\Psi}_{1, (2M-1)/2}(0)$ фиксировались равными 1. Значения функции $G_1(x, \xi, t)$ определялись приближенно по формуле (8) в результате вычисления суммы первых 100 членов рядов, причем при $t \leq 0,2$ использовался первый ряд, а при $t > 0,2$ использовался второй ряд. Интегралы, входящие в функцию $\beta(\varphi, \Psi_2; t_i, x)$,

вычислялись приближенно по квадратурной формуле средних прямоугольников с шагами $\tau = 0,01$ по переменной t и $h = 0,01$ по переменной x .

Предположим сначала, что исходные данные задачи известны точно. Соответствующий результат восстановления функции $\psi_1(t)$ представлен на рис. 1.

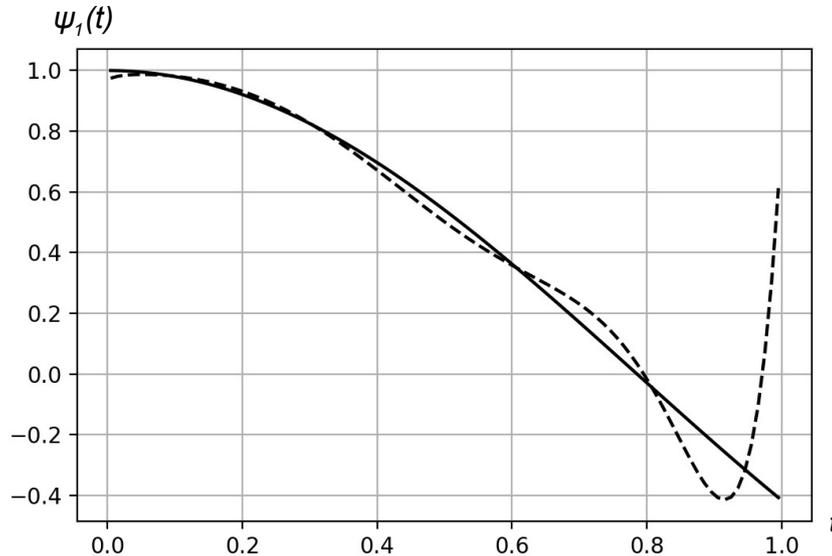


Рис. 1. Решение примера 1 в условиях отсутствия погрешностей

Здесь и далее сплошной линией изображено точное решение задачи, а пунктирной линией – ее приближенное решение.

Теперь пусть исходные данные задачи возмущаются случайными погрешностями, по модулю не превосходящими 0,1. Тогда результат восстановления $\psi_1(t)$ при прежних параметрах метода показан на рис. 2.

Целесообразной представляется дополнительная обработка результата с целью получения более гладкого решения. Для этого будем искать функцию $\psi_1(t)$ в виде полинома

$$\psi_1(t) = a_0 t^5 + a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t + a_4,$$

коэффициенты которого ищутся на основании найденного приближенного набора значений $\psi_1(t_{1/2}), \dots, \psi_1(t_{(2M-1)/2})$ при помощи метода наименьших квадратов. Результат представлен на рис. 3.

Модельный пример 2. Теперь рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения (1), в которой $0 \leq x \leq 1$ и $\gamma = 1$. В число исходных данных входят функции

$$\varphi(x) = e^{-x} \sin(x), \quad \psi_2(t) = e^{-1} [\sin(2t-1) + \cos(2t-1)],$$

$$u\left(t, \frac{1}{3}\right) = e^{-1/3} \sin\left(\frac{1}{3} - 2t\right).$$

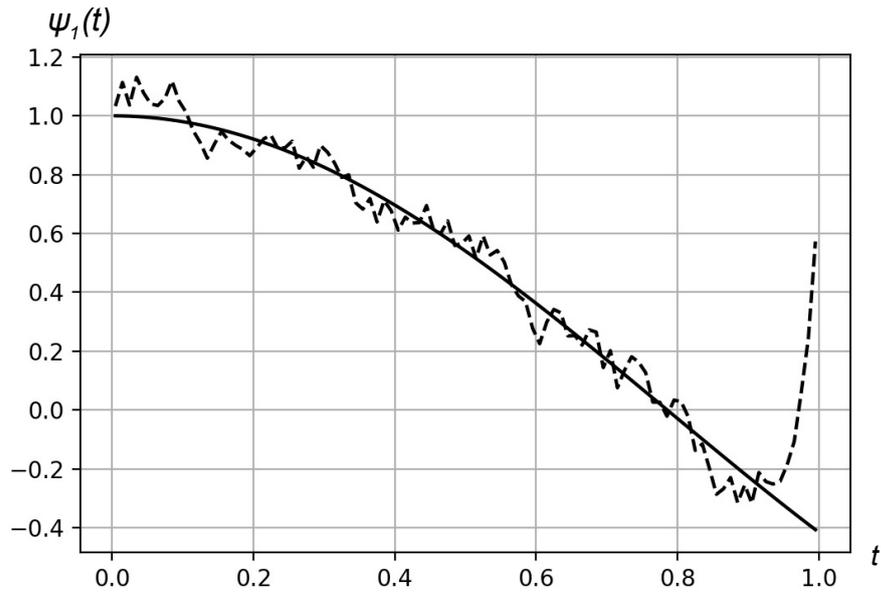


Рис. 2. Решение примера 1 в условиях наличия погрешностей

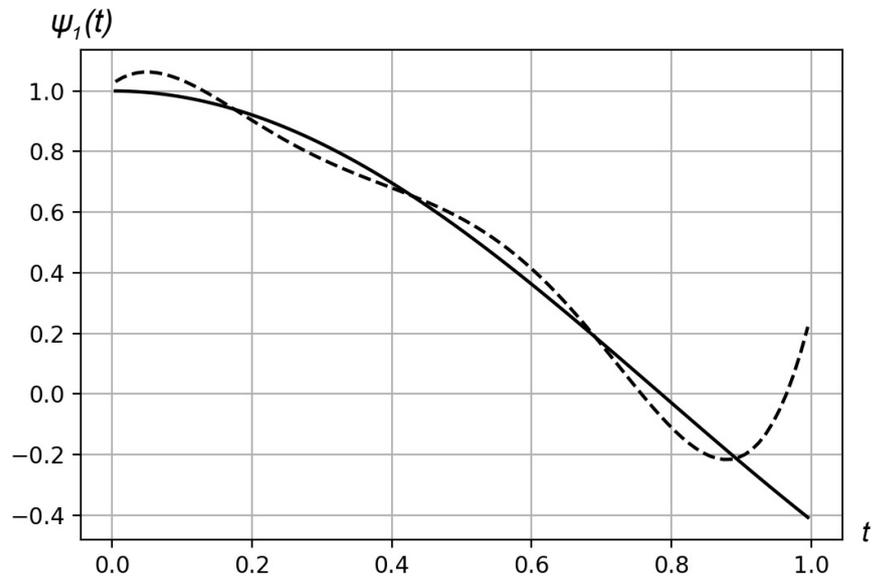


Рис. 3. Сглаживание решения примера 1 методом наименьших квадратов

Ставится задача восстановления функции $\psi_1(t)$ при $0 \leq t \leq 1$.

Замечание 4. Точное решение задачи фиксируется формулой $\psi_1(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$ при точном решении задачи (1)–(3), равном

$$u(t, x) = e^{-x} \sin(x - 2t).$$

При проведении численных экспериментов использовались следующие параметры метода: $\tau = 0,01$, $L = 1000$, $\theta = 0,01$. Все значения $\bar{\Psi}_{1,1/2}(0), \dots$

$\bar{\Psi}_{1,(2M-1)/2}(0)$ принимались равными 1. Значения функции $G_2(x, \xi, t)$ вычислялись приближенно по формуле (9) ограничиваясь вычислением суммы первых 100 членов рядов, причем при $t \leq 0,2$ применялся первый ряд, а при $t > 0,2$ применялся второй ряд. Интегралы функции $\beta(\varphi, \psi_2; t_i, x)$ вычислялись приближенно по квадратурной формуле средних прямоугольников с шагами $\tau = 0,01$ по переменной t и $h = 0,1$ по переменной x .

Предположим вначале, что исходные данные задачи известны точно. Соответствующий результат восстановления $\psi_1(t)$ проиллюстрирован на рис. 4.

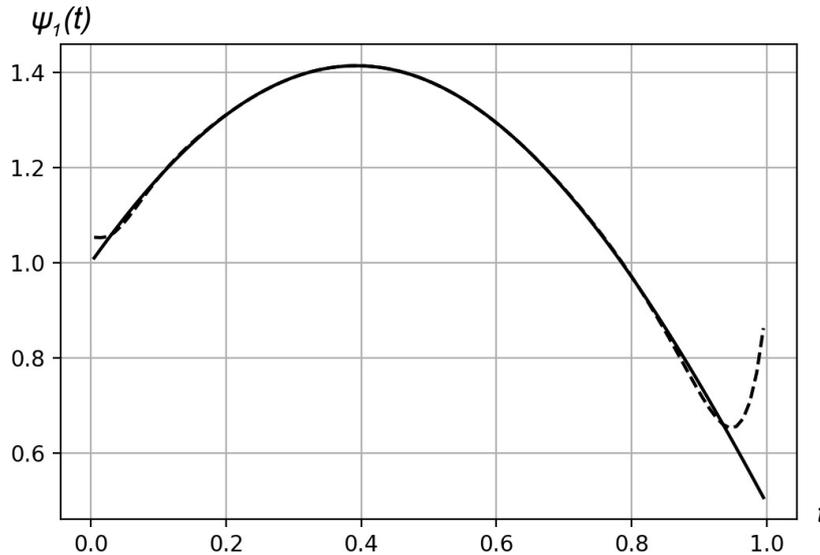


Рис. 4. Решение примера 2 в условиях отсутствия погрешностей

Далее предположим, что исходные данные задачи возмущаются случайными погрешностями, по модулю не превосходящими 0,05. Тогда результат восстановления $\psi_1(t)$ при тех же значениях параметров вычислительной схемы продемонстрирован на рис. 5.

Дополнительная обработка результата с целью получения более гладкого решения проводилась следующим образом. Решение задачи искалось в виде полинома

$$\psi_1(t) = a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t + a_4,$$

коэффициенты которого определялись на основе найденного множества значений $\psi_1(t_{1/2}), \dots, \psi_1(t_{(2M-1)/2})$ методом наименьших квадратов. Результат показан на рис. 6.

Заключение

В работе предложены численные методы восстановления граничного условия в начально-краевой задаче для линейного одномерного параболиче-

ского уравнения. Рассмотрены первая и вторая краевые задачи. Основой упомянутых методов служит непрерывный операторный метод решения уравнений в банаховых пространствах. Сходимость методов может быть обоснована с использованием аппарата теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. Решение модельных примеров проиллюстрировало эффективность разработанных методов. Весьма перспективными направлениями дальнейших исследований являются распространения предложенного в статье подхода на многомерные уравнения, нелинейные уравнения, а также задачи одновременного восстановления нескольких граничных условий.

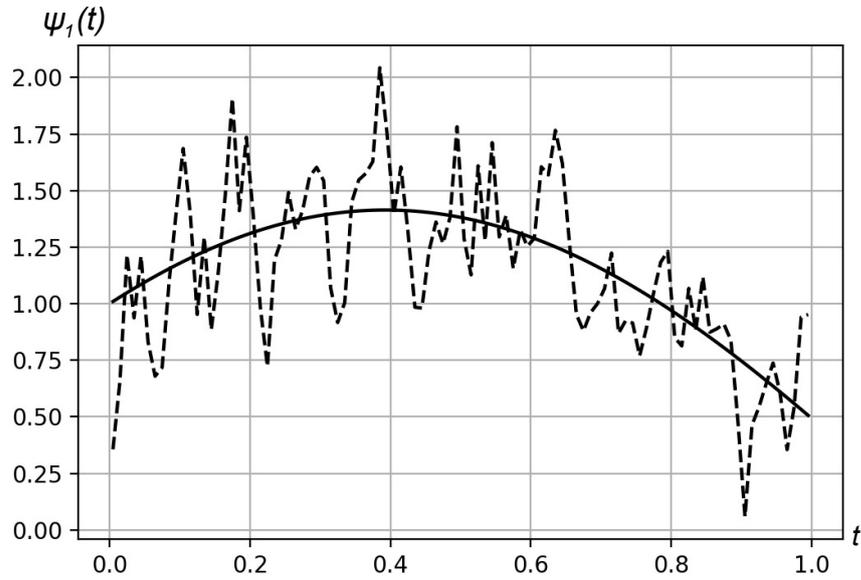


Рис. 5. Решение примера 2 в условиях наличия погрешностей

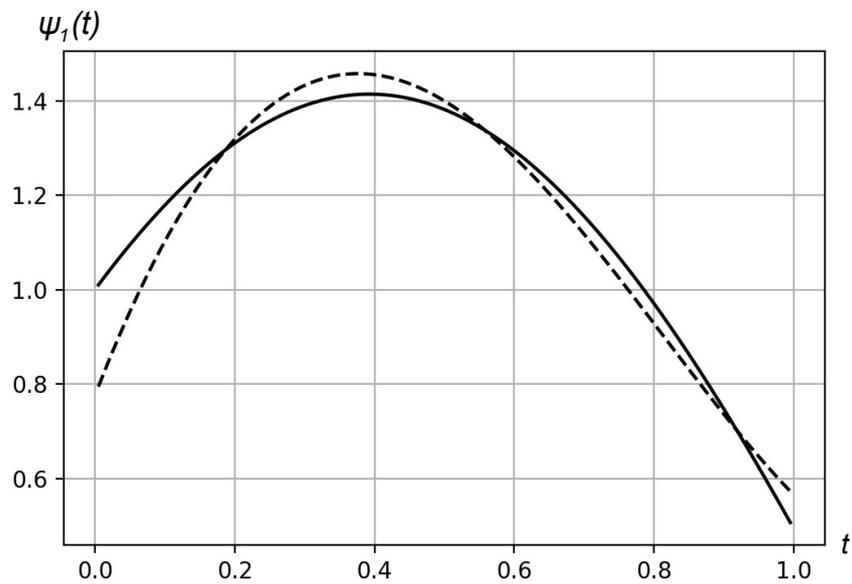


Рис. 6. Сглаживание решения примера 2 методом наименьших квадратов

Библиографический список

1. **Алифанов, О. М.** Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – Москва : Наука, 1988. – 288 с.
2. **Кабанихин, С. И.** Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
3. **Алифанов, О. М.** Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. – Москва : Машиностроение, 1988. – 280 с.
4. **Иванов, В. К.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – Москва : Наука, 1978. – 206 с.
5. **Самарский, А. А.** Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
6. **Бек, Дж.** Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр. – Москва : Мир, 1989. – 312 с.
7. **Vasil'ev, V. V.** The numerical solution of the boundary inverse problem for a parabolic equation / V. V. Vasil'ev, M. V. Vasilyeva, A. M. Kardashevsky // AIP Conference Proceedings – 2016. – Vol. 1773, iss. 1. – Art. ID 100010.
8. **Vasiliev, V. I.** Numerical method for solving boundary inverse problem for one-dimensional parabolic equation / V. I. Vasiliev, L. Su // Математические заметки СВФУ. – 2017. – Т. 24, № 2. – С. 108–117.
9. **Jonas, P.** Approximate inverse for a one-dimensional inverse heat conduction problem / P. Jonas, A. K. Louis // Inverse Problems. – 1999. – Vol. 16, iss. 1. – P. 175–185.
10. **Hon, Y. C.** The method of fundamental solution for solving multidimensional inverse heat conduction problems / Y. C. Hon, Y. Wei // CMES – Computer Modelling in Engineering and Sciences. – 2005. – Vol. 7, iss. 2. – P. 119–132.
11. **Wen, P. H.** Inverse heat conduction problems by using particular solutions / P. H. Wen, Y. C. Hon, Y. G. Xu // Heat Transfer Asian Res. – 2011. – Vol. 40, iss. 2. – P. 171–186.
12. **Бойков, И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
13. **Полянин, А. Д.** Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – Москва : Физматлит, 2001. – 576 с.

References

1. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Romyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach i ikh prilozheniya k obratnym zadacham teploobmena* [Extreme methods for solving ill-posed problems and their application to inverse problems of heat exchange]. Moscow: Nauka, 1988, 288 p. [In Russian]
2. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and ill-posed problems]. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009, 457 p. [In Russian]
3. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse problems of heat exchange]. Moscow: Mashinostroenie, 1988, 280 p. [In Russian]
4. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow: Nauka, 1978, 206 p. [In Russian]
5. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS, 2003, 784 p. [In Russian]
6. Bek Dzh., Blakuell B., Sent-Kler Ch. *Nekorrektnye obratnye zadachi teploprovodnosti* [Ill-posed inverse heat conduction problems]. Moscow: Mir, 1989, 312 p. [In Russian]
7. Vasil'ev V. V., Vasilyeva M. V., Kardashevsky A. M. *AIP Conference Proceedings*. 2016, vol. 1773, iss. 1, Art. ID 100010.

8. Vasiliev V. I., Su L. *Matematicheskie zametki SVFU* [Mathematical notes of NEFU]. 2017, vol. 24, no. 2, pp. 108–117. [In Russian]
9. Jonas P., Louis A. K. *Inverse Problems*. 1999, vol. 16, iss. 1, pp. 175–185.
10. Hon Y. C., Wei Y. *CMES – Computer Modelling in Engineering and Sciences*. 2005, vol. 7, iss. 2, pp. 119–132.
11. Wen P. H., Hon Y. C., Xu Y. G. *Heat Transfer Asian Res*. 2011, vol. 40, iss. 2, pp. 171–186.
12. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
13. Polyanin, A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of linear equations in mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001, 576 p. [In Russian]

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of
the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Рязанцев Владимир Андреевич

кандидат технических наук, доцент,
кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Ryazantsev Vladimir Andreevich

Candidate of engineering sciences,
associate professor, sub-department
of higher and applied mathematics,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Образец цитирования:

Бойков, И. В. Об одном методе восстановления граничного условия для линейных уравнений параболического типа / И. В. Бойков, В. А. Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 42–56. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-4.